

## TD BARYCENTRE AVEC CORRECTION

**Exercice1 :** Construire  $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$

**Solution :**  $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$  donc :

$$4\overline{AG} - 5\overline{BG} = \vec{0}$$

$$4\overline{AG} + 5(\overline{GA} + \overline{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -4\overline{GA} + 5\overline{GA} + 5\overline{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{GA} + 5\overline{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AG} = 5\overline{AB}$$

Donc le point  $G \in (AB)$



**Exercice2 :**

Construire  $G = \text{Bar}\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

**Solution :**

$$G = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2}))\}$$

donc :  $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1)\}$

$$\text{donc : } 2\overline{AG} - \overline{BG} = \vec{0}$$

$$2\overline{AG} - (\overline{BA} + \overline{AG}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG} = \overline{AB} \text{ Donc } G = B$$

**Exercice3 :** Dans le plan  $(P)$  rapporté à un

repère  $R(\vec{i}; \vec{j})$  soient  $A(3;2)$  et  $B(4;1)$

et soit  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -5)\}$

Déterminer les coordonnées de  $G$

**Solution :** on a :

$$\begin{cases} x_G = \frac{-x_A + 5x_B}{4} \\ y_G = \frac{-y_A + 5y_B}{4} \end{cases} \text{ donc}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{17}{4} \\ y_G = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } G\left(\frac{17}{4}; \frac{3}{4}\right)$$

**Exercice4 :** soit ABC un triangle et soit :

$$I = \text{Bar}\{(B, 4); (C, -3)\}$$

Déterminer les coordonnées du point  $I$  dans

le repère  $R(A; \overline{AB}; \overline{AC})$

**Solution :** on a : donc

$$(4 + (-3))\overline{AI} = 4\overline{AB} - 3\overline{AC}$$

donc  $\overline{AI} = 4\overline{AB} - 3\overline{AC}$  donc dans le repère

$$R(A; \overline{AB}; \overline{AC}) \quad I(4; -3)$$

**Exercice5 :**  $E$  et  $F$  deux points du plan tels que :  $\overline{EG} = 2\overline{EF}$  et  $E \notin (AB)$  et  $G$  est le barycentre des points  $(A;2)$  et  $(B;-3)$

1) Montrer que  $G$  est le barycentre des points  $(E;-1)$  et  $(F;2)$

2) en déduire que les droites  $(EF)$  et  $(AB)$  se coupent et déterminer le point d'intersection

**solution :**  $\overline{EG} = 2\overline{EF} \Leftrightarrow \overline{EG} = 2(\overline{EG} + \overline{GF})$

$$\Leftrightarrow \overline{EG} = 2\overline{EG} + 2\overline{GF} \Leftrightarrow -\overline{EG} - 2\overline{GF} = \vec{0}$$

$-\overline{EG} + 2\overline{GF} = \vec{0}$  donc  $G$  est le barycentre des points  $(E;-1)$  et  $(F;2)$

2) on a  $G$  le barycentre des points  $(E;-1)$  et  $(F;2)$  donc  $G \in (EF)$  et on a  $G$  est le barycentre

des points  $(A;2)$  et  $(B;-3)$  donc  $G \in (AB)$

Donc les droites  $(EF)$  et  $(AB)$  se coupent en  $G$

**Exercice6 :** Dans le plan  $(P)$  rapporté à un

repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(0;5)$  et  $B(3;2)$

Et soit  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de  $G$

2) Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :

$$(C) = \{M \in (P) / \|\overline{MA} + 2\overline{MB}\| = 6\}$$

**Solution :**

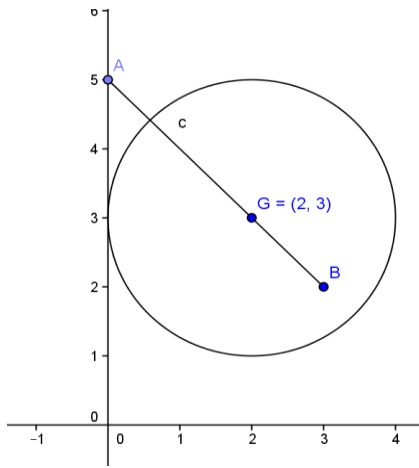
$$\begin{cases} x_G = \frac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \frac{5+4}{3} = 3 \end{cases} \text{ donc } G(2;3)$$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$\|\overline{MA} + 2\overline{MB}\| = 6\text{cm} \Leftrightarrow \|3\overline{MG}\| = 6\text{cm}$$

$$\Leftrightarrow \|3\overline{MG}\| = 6\text{cm} \Leftrightarrow 3MG = 6\text{cm} \Leftrightarrow MG = 2\text{cm}$$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $r = 2\text{cm}$



**Exercice 7 :** soit ABC un triangle

- 1) Construire  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$
- 2) Construire  $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1/2); (C, -3)\}$

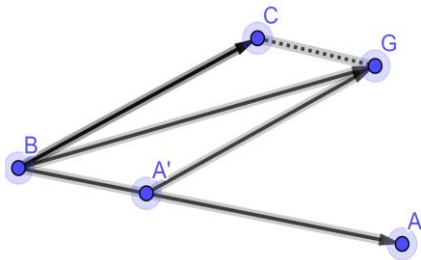
**Solution :** 1)

$G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$  donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$(1 + (-1) + 3)\overline{MG} = 1\overline{MA} + (-1)\overline{MB} + 3\overline{MC}$$

On pose :  $M = B$  on aura :

$$3\overline{BG} = \overline{BA} + 3\overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BG} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \overline{BC}$$



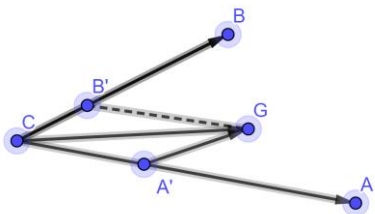
2)  $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1/2); (C, -3)\}$

Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$(4 + 1/2 - 3)\overline{MG} = 4\overline{MA} + 1/2\overline{MB} - 3\overline{MC}$$

On pose :  $M = C$  on aura :

$$\frac{3}{2}\overline{CG} = 4\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CG} = \frac{8}{3}\overline{CA} + \frac{1}{3}\overline{CB}$$



**Exercice 8 :** Soit ABC un triangle et G point tel que :  $2\overline{AC} = 3\overline{AG} - \overline{GB}$

- 1) montrer que G le barycentre de :  $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$  et construire le point G

**Solution :**  $2\overline{AC} = 3\overline{AG} - \overline{GB} \Leftrightarrow 2\overline{AC} - 3\overline{AG} + \overline{GB} = \vec{0}$

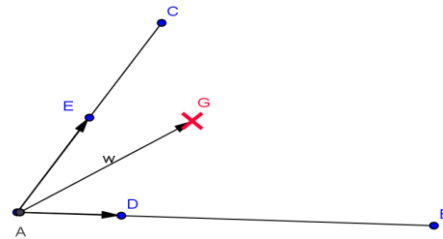
$$\Leftrightarrow 2(\overline{AG} + \overline{GC}) - 3\overline{AG} + \overline{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overline{AG} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overline{AG} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{GA} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \vec{0}$$

Donc G le barycentre de :  $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

On a :  $\textcircled{R} \quad \overline{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overline{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{AC}$

Donc :  $\overline{AG} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$  : donc  $\overline{AG} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{2}{4}\overline{AC}$



**Exercice 9 :** on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré  $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$

**Solution :** soit  $E = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -3)\}$

d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$-\overline{ME} = 2\overline{MA} - 3\overline{MB}$$

On pose :  $M = A$  on aura :  $-\overline{AE} = -3\overline{AB}$

$$\text{Donc : } \overline{AE} = 3\overline{AB}$$

d'après la Propriété d'associativité on a :

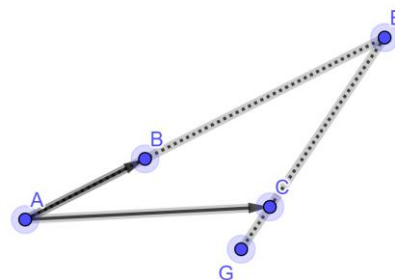
$$G = \text{Bar}\{(E, -1); (C, 5)\}$$

d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$4\overline{MG} = -\overline{MA} + 5\overline{MC}$$

On pose :  $M = E$  on aura :

$$4\overline{EG} = 5\overline{EC} \Leftrightarrow \overline{EG} = \frac{5}{4}\overline{EC}$$



**Exercice 10 :** Soit ABC un triangle. et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment [BC]. Montrer que G est le centre de gravité de (A;1) et (I;2)

**Solution :** G le centre de gravité du triangle ABC

Donc G est le barycentre de :

$$\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$$

I le milieu du segment  $[BC]$  Donc I est le barycentre de :  $\{(B, 1); (C, 1)\}$

D'après la Propriété d'associativité on a : G est le barycentre de :  $\{(I, 2); (A, 1)\}$

**Exercice11** : Soit  $ABC$  un triangle. Pour tout point  $M$  on pose :  $\vec{V} = 2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}$

1) Réduire l'écriture de  $\vec{V}$  et montrer que  $\vec{V}$  ne dépend pas du point  $M$

2) soit  $K = \text{Bar}\{(C, -3); (B, 1)\}$  montrer que :  $\vec{V} = 2\vec{KA}$

3) soit  $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, -3)\}$  montrer que : Pour tout point  $M$  on a :

$$2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{GM}$$

4) en déduire l'ensemble des points  $M$  tel que  $\|2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\|$

**Solution : 1)**

$$\vec{V} = 2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = 2\vec{MA} + \vec{MA} + \vec{AB} - 3(\vec{MA} + \vec{AC})$$

$\vec{V} = \vec{AB} - 3\vec{AC}$  donc  $\vec{V}$  ne dépend pas du point  $M$

2) on a :  $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{AB} - 3\vec{AC}$  Pour tout point  $M$  donc si  $M = K$  on aura :

$$2\vec{KA} + \vec{KB} - 3\vec{KC} = \vec{AB} - 3\vec{AC}$$

Et on a :  $K = \text{Bar}\{(C, -3); (B, 1)\}$  donc :

$$\vec{KB} - 3\vec{KC} = \vec{0}$$

Donc :  $2\vec{KA} = \vec{AB} - 3\vec{AC}$  donc :  $2\vec{KA} = \vec{V}$

3) d'après la propriété caractéristique du

barycentre on a :

$$2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC} = (2 + (-1) + (-3))\vec{MG} = -2\vec{MG} = 2\vec{GM}$$

$$4) \|2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\|$$

$$\Leftrightarrow \|2\vec{GM}\| = \|2\vec{KA}\| \Leftrightarrow 2GM = 2KA \Leftrightarrow GM = KA$$

Donc l'ensemble des points est le cercle (C)

de centre  $G$  et de rayon  $r = KA$

**Exercice 12** : Soit  $ABC$  un triangle tel que :

$AC = 6\text{cm}$  et  $AB = 5\text{cm}$  et  $BC = 4\text{cm}$

a) Construire  $G$  le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$

b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points  $M$  du plan tel que :  $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = AC$

c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points  $M$  du plan tel que :

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} + 2\vec{MC}\|$$

**Solution** :  $G$  est le barycentre de :

$\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$  donc  $G$  est le barycentre de :  $\{(B, 2); (I, 2)\}$  d'après La propriété d'associativité du barycentre

Donc  $G$  est le milieu du segment  $[BI]$

b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$$\|4\vec{MG}\| = AC \Leftrightarrow GM = \frac{AC}{4} = 1.5$$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $r = 1.5\text{cm}$

b) Soit  $G'$  est le barycentre de :

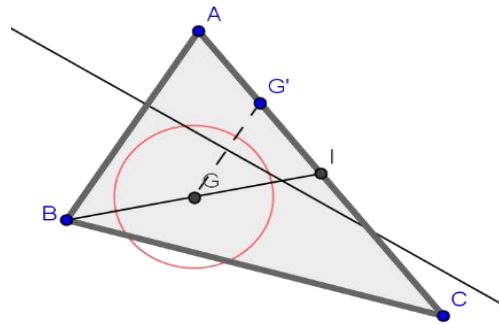
$\{(A, 3); (C, 1)\}$  Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :  $\forall M \in (P)$

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MG} \text{ et } 3\vec{MA} + \vec{MC} = 4\vec{MG}'$$

$$\text{Donc : } M \in (F) \Leftrightarrow 4MG = 4MG' \Leftrightarrow MG = MG'$$

Donc : (F) est la médiatrice du segment  $[GG']$

Et pour construire le point  $G'$  on a :  $\vec{AG}' = \frac{1}{4}\vec{AC}$



**Exercice13** : Dans le plan (P) rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  Soient  $A(-1;1)$  et  $B(0;2)$  et

$C(1;-1)$

et  $D(1;0)$  Et soit  $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de

$K = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$

2) Déterminer les coordonnées de  $L$  le centre de gravité du triangle  $ABC$

3) Déterminer les coordonnées de Barycentre des points  $(A;2)$  et  $(B;3)$  et  $(C;1)$  et  $(D;-1)$

$$\text{Solution : 1) } \begin{cases} x_K = \frac{-2+0}{5} = \frac{-2}{5} \\ y_K = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ donc } K\left(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$$

2) les coordonnées de  $L$  sont :

$$\begin{cases} x_L = \frac{1x_A + 1x_B + 1x_C}{1+1+1} \\ y_L = \frac{1y_A + 1y_B + 1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \frac{1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1}{1+1+1} = 0 \\ y_L = \frac{1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times (-1)}{1+1+1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc } L\left(0; \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{2x_A + 3x_B + 1x_C + (-1)x_D}{5} = \frac{-2}{5} \\ y_G = \frac{2y_A + 3y_B + 1y_C + (-1)y_D}{5} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$G\left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right)$$

**Exercice14** : soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe

Soit  $H$  le barycentre du système pondéré  $\{(A, 2); (B, 5); (C, -1)\}$

Soit  $K$  le barycentre du système pondéré  $\{(B, 5); (C, -1); (D, 6)\}$

Soit  $E = \text{Bar}\{(C, -1); (B, 5)\}$

1) Montrer que  $\overline{BE} = -\frac{1}{4}\overline{BC}$  et Construire  $E$

2) Montrer que  $H$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A, 1); (E, 2)\}$  et Construire  $H$

3) Montrer que  $K$  est le barycentre du système pondéré  $\{(D, -3); (E, 2)\}$

4) a) Montrer que  $D$  est le barycentre du système pondéré  $\{(K, 1); (E, 2)\}$

b) en déduire que  $(AK) \parallel (DH)$

**Solution :**

1) on sait que si  $M$  est un point quelconque dans le plan  $(P)$  on a :

$$\overline{ME} = \frac{1}{4}(5\overline{MB} - \overline{MC})$$

Pour :  $M=B$  on a :  $\overline{BE} = -\frac{1}{4}\overline{BC}$  et on peut

Construire  $E$

2) on a :  $E = \text{Bar}\{(C, -1); (B, 5)\}$  et  $5 + (-1) = 4$

D'après La propriété d'associativité on a  $H$  le barycentre du système pondéré  $\{(A, 2); (E, 4)\}$  et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que  $H$  est le barycentre du système pondéré  $\{(A, 1); (E, 2)\}$

on sait que si  $M$  est un point quelconque dans le plan  $(P)$  on a :

$$\overline{MH} = \frac{1}{3}(2\overline{ME} + \overline{MA})$$

Pour :  $M=A$  on a :  $\overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AE}$  et on peut

Construire  $E$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que  $K$  le barycentre du système Pondéré  $\{(D, -6); (E, 4)\}$

Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que  $K$  est le barycentre du système pondéré  $\{(D, -3); (E, 2)\}$

4) a) Montrons que  $D$  est le barycentre du système pondéré  $\{(K, 1); (E, 2)\}$  ?

Puisque  $K$  est le barycentre du système pondéré  $\{(D, -3); (E, 2)\}$

Pour tout point  $M$  du plan  $(P)$  on a :

$$-\overline{MK} = -3\overline{MD} + 2\overline{ME}$$

$$\text{Donc : } 3\overline{MD} = \overline{MK} + 2\overline{ME}$$

Donc :  $D$  est le barycentre du système pondéré  $\{(K, 1); (E, 2)\}$

4) b) Pour tout point  $M$  du plan  $(P)$  on a :

$$3\overline{MH} = 2\overline{ME} + \overline{MA} \text{ et } 3\overline{MD} = 2\overline{ME} + \overline{MK}$$

$$\text{Donc : } 3\overline{DH} = 3\overline{MH} - 3\overline{MD}$$

$$3\overline{DH} = 3(\overline{MH} - \overline{MD})$$

$$\text{Donc : } 3\overline{DH} = \overline{MA} - \overline{MK}$$

$$\text{Donc : } (AK) \parallel (DH) : \text{Donc } 3\overline{DH} = -\overline{AK}$$

**Exercice15** :  $ABC$  un triangle

$I$  et  $J$  et  $K$  points tels que :  $2\overline{BI} = 3\overline{BC}$

Et  $8\overline{CJ} = \overline{CA}$  et  $5\overline{AK} = 2\overline{AB}$

1) Montrer que  $I$  est le barycentre des points pondéré  $\left(B; \frac{1}{2}\right)$  et  $\left(C; \frac{-3}{2}\right)$

2) le plan  $(P)$  est rapporté au repère

$$R(A; \overline{AB}; \overline{AC})$$

a) Déterminer les coordonnées du point  $J$

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(IK)$

c) Montrer que les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Solution :** 1)

$$\frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CI} = \frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}(\overline{CB} + \overline{BI})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CB} - \frac{3}{2}\overline{BI} = -\overline{BI} + \frac{3}{2}\overline{BC} = -\frac{3}{2}\overline{BC} + \frac{3}{2}\overline{BC} = \vec{0}$$

Donc :  $\frac{1}{2}\overline{BI} - \frac{3}{2}\overline{CI} = \vec{0}$  par suite :  $I$  est le

barycentre des points pondéré  $\left(B; \frac{1}{2}\right)$  et

$$\left(C; \frac{-3}{2}\right)$$

2) dans le repère  $R(A; \overline{AB}; \overline{AC})$  on a :  $A(0;0)$  et  $B(1;0)$  et  $C(0;1)$

a) on a :  $8\overline{CJ} = \overline{CA}$  donc :  $8\overline{CA} + 8\overline{AJ} = \overline{CA}$   
donc :  $8\overline{AJ} = -7\overline{CA}$  donc :  $\overline{AJ} = \frac{7}{8}\overline{AC}$

$$\text{donc : } J\left(0; \frac{7}{8}\right)$$

b) la droite  $(IK)$  passe par  $I$  et de vecteur directeur

$\overline{IK}$  et on a :  $I$  est le barycentre de  $\left(B; \frac{1}{2}\right)$  et

$$\left(C; \frac{-3}{2}\right) \text{ donc : } \begin{cases} x_I = \frac{\frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \times 0}{-1} = -\frac{1}{2} \\ y_I = \frac{\frac{1}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times 1}{-1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } I\left(\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Et on a :  $5\overline{AK} = 2\overline{AB}$  Donc :  $\overline{AK} = \frac{2}{5}\overline{AB}$

$$\text{Donc : } K\left(\frac{2}{5}; 0\right) \text{ Donc : } \overline{IK}\left(\frac{9}{10}; \frac{3}{2}\right)$$

L'équation cartésienne de la droite  $(IK)$  est :

$$\frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + c = 0$$

$$I \in (IK) : \text{ donc : } \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} - \frac{27}{20} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{21}{10}$$

$$\text{donc : } (IK) : \frac{3}{2}x - \frac{9}{10}y + \frac{21}{10} = 0$$

$$(IK) : 15x - 9y + 21 = 0$$

c) pour Montrer que les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés il suffit de montrer que  $J \in (IK)$

$$\text{on a : } (IK) : 15x - 9y + 21 = 0 \text{ et } J\left(0; \frac{7}{8}\right)$$

$$\text{et on a : } 15 \times 0 - 9 \times \frac{7}{8} + 21 = -21 + 21 = 0$$

par suite :  $J \in (IK)$  donc les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Exercice16 :** ABC un triangle et  $I$  un point tel que :  $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB}$  et  $K$  le symétrique de  $A$  par

rapport a  $C$  et  $J$  le milieu du segment  $[BC]$

1) exprimer  $I$  et  $J$  et  $K$  comme le barycentre de points pondérés a déterminer

2) quelle est le barycentre des points pondérés  $(A;1)$  ;  $(B;2)$  ;  $(B;-2)$  et  $(C;-2)$  ?

3) Montrer que les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Solution :** 1)

• on a  $J$  le milieu du segment  $[BC]$

Donc :  $J$  est le barycentre des points pondéré  $(B;1)$  et  $(C;1)$

• on a :  $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB} \Leftrightarrow 3\overline{AI} = 2\overline{AB} \Leftrightarrow 3\overline{AI} = 2\overline{AI} + 2\overline{IB}$

$\Leftrightarrow \overline{IA} + 2\overline{IB} = \vec{0}$  Donc :  $I$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(B;2)$

• on a :  $K$  le symétrique de  $A$  par rapport a  $C$

$$\text{Donc : } 2\overline{KC} = \overline{KA}$$

$$\text{Donc : } \overline{KA} - 2\overline{KC} = \vec{0}$$

Donc :  $K$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(C;-2)$

2) on a :  $K$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(C;-2)$  donc :

$$1\overline{KA} + 2\overline{KB} - 2\overline{KB} - 2\overline{KC} = \vec{0}$$

Donc :  $K$  est le barycentre des points pondéré  $(A;1)$  et  $(B;2)$  et  $(B;-2)$  et  $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que  $K$  le barycentre des points pondéré  $(J;-4)$  et  $(I;3)$  par suite :  $K \in (IJ)$  donc les points  $I$  et  $J$  et  $K$  sont alignés.

**Exercice17:** ABCD un carré et  $I$  et  $J$  les milieux respectivement des segments  $[BC]$  et  $[CD]$  et  $M$  et  $N$  deux points tel que :

$$\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AB} \text{ et } \overline{AN} = \frac{1}{4}\overline{AD}$$

1) déterminer le barycentre des points pondérés  $\{(A, 3); (B, 1)\}$  et  $\{(A, 3); (D, 1)\}$

2) soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A;3)$  ;  $(B;1)$  ;  $(C;1)$  et  $(D;1)$

3) Montrer que les droites  $(MJ)$  et  $(NI)$  et  $(AC)$  sont concourantes en  $G$

**Solution :** 1) on a :

$$\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AB} \Leftrightarrow 4\overline{AM} = \overline{AM} + \overline{MB}$$

$$\text{donc : } 3\overline{MA} + \overline{MB} = \vec{0}$$

Donc :  $M$  est le barycentre des points pondéré (A;3) et (B;1)

De même on a :  $\overline{AN} = \frac{1}{4}\overline{AD} \Leftrightarrow 4\overline{AN} = \overline{AN} + \overline{ND}$

donc :  $3\overline{NA} + \overline{ND} = \vec{0}$

Donc :  $N$  est le barycentre des points pondéré (A;3) et (D;1)

2) soit  $G$  le barycentre des points pondérés (A;3) ; (B;1) ; (C;1) et (D;1) et puisque  $J$  le milieu du segment  $[DC]$  alors  $J$  est le barycentre des points pondéré (C;1) et (D;1)

D'après La propriété d'associativité on trouve que  $G$  est le barycentre des points pondéré (M;4) et (J;2) par suite :  $G \in (JM)$

De même on a :  $I$  le milieu du segment  $[BC]$  alors  $I$  est le barycentre des points pondéré (B;1) et (C;1) et d'après La propriété d'associativité on trouve que  $G$  est le barycentre des points pondéré (N;4) et (I;2) par suite :  $G \in (NI)$

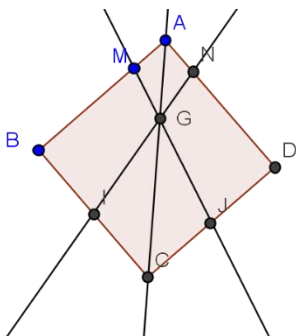
Soit  $H$  le centre de gravité du triangle BCD donc

$H$  est le barycentre des points pondéré (B;1) et (C;1) et (D;1) par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que  $G$  est le barycentre des points pondéré (A;3) et (H;3)

donc :  $G$  le milieu du segment  $[AH]$  et puisque ABCD est un carré alors :  $H \in [AC]$  donc

$G \in (AC)$

Conclusion : les droites  $(MJ)$  et  $(NI)$  et  $(AC)$  sont concourantes en  $G$



**Exercice18:**  $A$  et  $B$  deux points tel que :  $AB = 4\text{cm}$  et soit :  $(F)$  l'ensemble des points  $M$

du plan tel que :  $\frac{MA}{MB} = 3$

1)montrer que :  $M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0$

2)soit  $G$  le barycentre des points pondérés (A;1) ;(B;3) et  $K$  le barycentre des points pondérés (A;1) ;(B;-3)

a) Montrer que :  $M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MG} \cdot \overline{MK} = 0$

b) En déduire l'ensemble  $(F)$  et le tracer

**Solution :** 1)  $M \in (F) \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB$

$M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0$

2)a)

$M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overline{MA} - 3\overline{MB})(\overline{MA} + 3\overline{MB}) = 0$

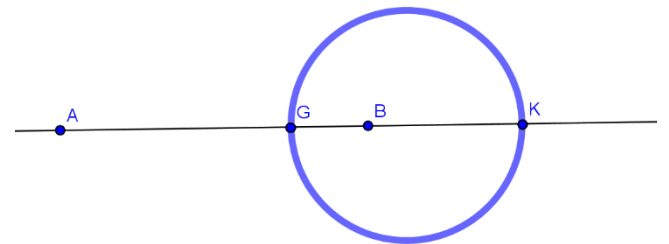
et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$\overline{MA} + 3\overline{MB} = 4\overline{MG}$  et  $\overline{MA} - 3\overline{MB} = -2\overline{MK}$

Donc :  $M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA}^2 - 9\overline{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow -8\overline{MA} \cdot \overline{MK} = 0$

Donc :  $M \in (F) \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MK} = 0$

2)b) d'après a) en déduit que  $(F)$  est le cercle de dont un diamètre est  $[GK]$



**Exercice19:**  $A$  et  $B$  deux points tel que :  $AB = 4\text{cm}$  et  $I$  le milieu du segment  $[AB]$

1)soit :  $(E)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tel que :  $\overline{IM} \cdot \overline{AB} = 4$  et soit  $H$  le barycentre des points pondérés (A;1) ;(B;3)

a)montrer que :  $H \in (E)$

b)vérifier que :  $M \in (E) \Leftrightarrow \overline{HM} \cdot \overline{AB} = 0$

c)déterminer la nature de l'ensemble  $(E)$

2)soit :  $(F)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tel que :  $MA^2 - MB^2 = 8$

a) Montrer que :  $\forall M \in (P)$  on a :

$MA^2 - MB^2 = 2\overline{IM} \cdot \overline{AB}$

b) En déduire que  $(F) = (E)$  et le tracer

**Solution :** 1)on a :  $H$  le barycentre des points pondérés (A;1) ;(B;3) donc :  $\overline{AH} = \frac{3}{4}\overline{AB}$



Et on a  $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH}$  donc  $\overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

donc  $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$  par suite  $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}AB^2 = 4$

Donc  $H \in (E)$

b)  $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

c) de b) on déduit que  $(E)$  est la droite perpendiculaire à  $(AB)$  en  $H$

2)a)

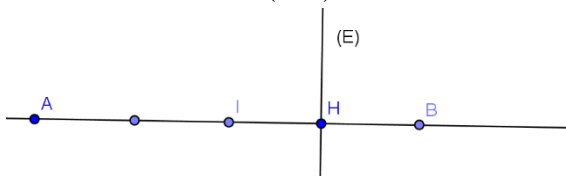
$MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a :  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

2)b)

$M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow M \in (E)$

Donc  $(F) = (E)$  par suite  $(F)$  est la droite perpendiculaire à  $(AB)$  en  $H$



**Solution20** :  $A$  et  $B$  deux points tel que :  $AB = 3cm$  et  $I$  le milieu du segment  $[AB]$

1) soit :  $(C)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tel que :  $MA^2 + MB^2 = 9$  et soit  $H$  le barycentre des points pondérés  $(A;1) ; (B;3)$

a) montrer que :  $M \in (C) \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

b) déterminer la nature et tracer l'ensemble  $(C)$

2) soit :  $(C')$  l'ensemble des points  $M$  du plan tel

que :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{-5}{4}$

a) Montrer que :  $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

b) déterminer la nature et tracer l'ensemble  $(C')$

**Solution** : 1) on a :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$

Car :  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

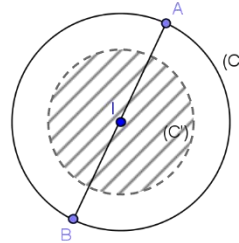
$$M \in (C) \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 9 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$$

b) en déduit que  $(C)$  est le cercle de centre  $I$  et de rayon  $r = \frac{3}{2}$

2) a)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

Donc :  $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

2) b) en déduit que  $(C')$  est le cercle de centre  $I$  et de rayon  $r = 1$



**Solution21** : A l'aide des barycentres, démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes et retrouver la position du centre de gravité sur les médianes.

**Solution** : Notons  $ABC$  le triangle,  $A'$  le milieu de  $[BC]$ ,  $B'$  le milieu de  $[AC]$  et  $C'$  le milieu de  $[AB]$ . Définissons finalement  $G$  l'isobarycentre de  $A, B$  et  $C$ . Alors, par associativité du barycentre,  $G$  est le barycentre de  $(A,1)$  et  $(A',2)$ . Ainsi,  $G$  est sur la droite  $(AA')$ . De même,  $G$  est sur la droite  $(BB')$  et  $G$  est sur la droite  $(CC')$ . Ainsi, les trois droites sont concourantes en  $G$ . De plus, puisque  $G$  est le barycentre de  $(A,1)$  et  $(A',2)$  on a  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

**Solution22** :

Soit  $A, B, P$  trois points distincts du plan tels que  $P$  soit sur le segment  $[AB]$ . Écrire  $P$  comme barycentre de  $A$  et  $B$  avec des coefficients s'écrivant en fonction des distances  $PA, PB$ .

**Solution** Il suffit de remarquer que :  $\overrightarrow{PB} = \frac{PB}{AB}\overrightarrow{AB}$

et que  $\overrightarrow{PA} = -\frac{PA}{AB}\overrightarrow{AB}$

Ceci donne  $PB \times \overrightarrow{PA} + PA \times \overrightarrow{PB} = \vec{0}$

Ainsi,  $P$  est le barycentre de  $(A, PB)$  et de  $(B, PA)$ .



**C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux  
calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**